國立政治大學 114 學年度第 2 學期 小考 (1) 考試命題紙

考試科目：線性代數 (二)　　開課班別：商學院　　命題教授：吳漢銘

考試日期：4/1(三)10:30-11:50	※准帶項目打「O」，否則打「×」					1. 需加發計算紙或答案紙請在試題內封袋備註。2. 為環保節能減碳，試題一律採雙面印刷，有特殊印製需求，請註記：A 卷
本試題共2頁，印刷份數: 16 份	計算機	課本	筆記	字典	手機平板筆電	
備註：注意事項要看!! (ch4.1∼4.5)	O	×	×	×	×	

注意事項:

(1) 在答題紙上填寫學號和姓名。
(2) 所有問題可用中文或英文作答（無需考慮語法和拼寫）。
(3) 請按題號順序作答。總分為 120 分。
(4) 建議使用深色原子筆（允許使用鉛筆）。禁用手機 3C 產品。可使用計算機 (無程式功能)。
(5) 第 **III** 部分的計算過程，必須寫出（計算至小數點後 4 位）。
(6) 答題紙與試題卷須一併交回。
(7) 作弊學生當次及日後考試試卷將不予批改，情節嚴重將報校處理。
(8) 手寫向量時，請在英文字母下加 $\sim$ 符號: 打字體:$\mathbf{x}$，手寫體: $\underset{\sim}{x}$。

(-) 宣誓詞 (0%): 複寫下列宣誓詞至答案卷的第一頁最上面。(**不寫扣 10 分**)

0. ” 本人<u>姓名</u> 恪遵各項考試規則，若如違反，願受校方最嚴厲處罰，謹誓。”

(I) 選擇題 (30%，6%each); select one correct answer.

1. 關於特徵值與特徵向量的定義，下列敘述何者正確？

(A) 若 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$，則純量 λ 必為非零實數。
(B) 特徵向量 $\mathbf{x}$ 必須是非零向量。
(C) 特徵值 λ 必須是非零常數。
(D) 對於任意方陣 A，$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 永遠有非零解 $\mathbf{x}$。

2. 根據可逆矩陣定理，下列哪一項敘述與「$n \times n$ 方陣 A 為可逆矩陣」不等價？

(A) $\det(A) \neq 0$。
(B) $\text{rank}(A) = n$。
(C) 0 是 A 的一個特徵值。
(D) A 的列向量線性獨立。

3. 若 $\mathbf{x}$ 是矩陣 A 對應於特徵值 λ 的特徵向量，則關於 A^n 的特徵值與特徵向量，下列何者正確？

(A) $\mathbf{x}$ 是 A^n 的特徵向量，其對應特徵值為 $n\lambda$。
(B) $\mathbf{x}$ 是 A^n 的特徵向量，其對應特徵值為 λ^n。
(C) $n\mathbf{x}$ 是 A^n 的特徵向量，其對應特徵值為 λ^n。
(D) A^n 不一定有與 A 相同的特徵向量。

4. 關於相似矩陣 (Similar Matrices)，若 $A \sim B$ (即存在可逆矩陣 P 使得 $P^{-1}AP = B$)，下列哪一項性質不一定相同？

   (A) 特徵值 (Eigenvalues)。
   (B) 特徵向量 (Eigenvectors)。
   (C) 行列式 (Determinant)。
   (D) 秩 (Rank)。

5. 一個 $n \times n$ 矩陣 A 可以對角化 (Diagonalizable) 的充要條件是：

   (A) A 必須有 n 個相異的特徵值。
   (B) A 必須是可逆矩陣。
   (C) A 必須擁有 n 個線性獨立的特徵向量。
   (D) A 的行列式不為 0。

(II) 簡答題 (20%)(write down the statement (or definition), formula if any, interpretation)

6. 對於一個 $n \times n$ 的方陣 A，為什麼其是否擁有 n 個線性獨立的特徵向量是判斷其能否對角化的關鍵？若一個矩陣的特徵多項式中有重複的根 (即代數重數大於 1)，這是否代表該矩陣一定無法對角化？請從「幾何重數」與「代數重數」的觀念說明原因。

(III) 計算題 (40%)

7. Compute the indicated power of the matrix:

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}^9$$

(IV) 證明題 (30%)

8. Let A be an $n \times n$ matrix. Show that A is diagonalizable if and only if A has n linearly independent eigenvectors.