國立政治大學 114 學年度第 2 學期 期中考 考試命題紙

考試科目：線性代數 (二)　　開課班別：商學院　　命題教授: 吳漢銘

<table>
<tr><td>考試日期：4/15(三)09:20-11:00</td><td colspan="5">※准帶項目打「O」，否則打「×」</td><td rowspan="3">1. 需加發計算紙或答案紙請在試題內封袋備註。
2. 為環保節能減碳，試題一律採雙面印刷，有特殊印製需求，請註記：A 卷</td></tr>
<tr><td>本試題共3頁，印刷份數: 16 份</td><td>計算機</td><td>課本</td><td>筆記</td><td>字典</td><td>手機平板筆電</td></tr>
<tr><td>備註：注意事項要看!! (ch5.1∼5.4)</td><td>O</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td></tr>
</table>

注意事項:

(1) 在答題紙上填寫學號和姓名。
(2) 所有問題可用中文或英文作答 (無需考慮語法和拼寫)。
(3) 請按題號順序作答。總分為 120 分。
(4) 建議使用深色原子筆 (允許使用鉛筆)。禁用手機 3C 產品。可使用計算機 (無程式功能)。
(5) 第 **III** 部分的計算過程，必須寫出 (計算至小數點後 4 位)。
(6) 答題紙與試題卷須一併交回。
(7) 作弊學生當次及日後考試試卷將不予批改，情節嚴重將報校處理。
(8) 手寫向量時，請在英文字母下加 ∼ 符號: 打字體:$\mathbf{x}$，手寫體: $\underset{\sim}{x}$。

(-) 宣誓詞 (0%): 複寫下列宣誓詞至答案卷的第一頁最上面。(**不寫扣 10 分**)

0. ” 本人<u>姓名</u> 恪遵各項考試規則，若如違反，願受校方最嚴厲處罰，謹誓。”

(I) 選擇題 (30%，5%each); select one correct answer.

1. 關於 $\mathbb{R}^n$ 中的正交集合與正交矩陣，依據定義與定理，下列敘述何者正確？

   (A) 只要一個向量集合中任意兩個相異向量的內積皆為零，此集合必定是線性獨立的。
   (B) 若 Q 為一個正交矩陣 (Orthogonal Matrix)，則其轉置矩陣 Q^T 也是正交矩陣。
   (C) 若 Q 是一個方陣且其所有行向量彼此正交，則 Q 即為正交矩陣。
   (D) 若 Q 為正交矩陣，則其特徵值必定為實數 ± 1。

2. 對於任意一個 $m \times n$ 的實數矩陣 A，矩陣的四大基本子空間 (Fundamental Subspaces) 彼此間存在嚴格的正交關係。下列何者正確？

   (A) 列空間與行空間互為正交補集，即 $(row(A))^{\perp} = col(A)$。
   (B) 行空間與零空間互為正交補集，即 $(col(A))^{\perp} = null(A)$。
   (C) 列空間與零空間互為正交補集，即 $(row(A))^{\perp} = null(A)$。
   (D) 列空間與轉置矩陣的零空間互為正交補集，即 $(row(A))^{\perp} = null(A^T)$。

3. 關於 Gram-Schmidt 正交化演算法的理論意義，下列敘述何者正確？

   (A) 若輸入的一組基底向量順序改變，執行演算法後產生出來的正交基底必定會與原順序產生的正交基底一模一樣。
   (B) 演算法執行到第 k 步時，所產生的前 k 個正交向量之生成空間 (span)，與原輸入的前 k 個向量之生成空間完全相同。
   (C) 此演算法只能用於尋找子空間的正交基底，無法藉由標準化將其轉換為單範正交基底 (Orthonormal basis)。
   (D) 如果輸入的向量集合包含線性相依的向量，演算法仍能產生足夠數量且皆不為零的正交基底向量。

4. 根據定理，關於將一個 $m \times n$ 矩陣 A 進行 QR 分解 $(A = QR)$，下列何者錯誤？

    (A) Q 是一個 $m \times n$ 的矩陣，且其行向量構成一個單範正交集合 (Orthonormal set)。
    (B) R 是一個 $n \times n$ 的可逆上三角矩陣 (Invertible upper triangular matrix)。
    (C) R 的主對角線元素必定全不為零。
    (D) 任何任意大小與內容的實數矩陣 A，都保證一定能找到滿足上述條件的 QR 分解。

5. 關於實數對稱矩陣的特徵值與特徵向量定理，下列敘述何者正確？

    (A) 實對稱矩陣的特徵值有可能是純虛數，但只要能找到實數對應的特徵向量即可。
    (B) 若 A 為實對稱矩陣，且 $\mathbf{v}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 為對應於相同特徵值的特徵向量，則 $\mathbf{v}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 必定互相正交。
    (C) 若 A 為實對稱矩陣，且 $\mathbf{v}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 為對應於相異特徵值的特徵向量，則 $\mathbf{v}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 必定互相正交。
    (D) 特徵向量的正交性僅存在於可逆的對稱矩陣中，若對稱矩陣不可逆則不具備此性質。

6. 若實對稱矩陣 A 經過正交對角化得到 $A = QDQ^T$，並展開為 $A = \lambda_1\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T + \lambda_2\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T + \cdots + \lambda_n\mathbf{q}_n\mathbf{q}_n^T$，這稱為矩陣 A 的譜分解。關於分解式中的每一項 $\mathbf{q}_i\mathbf{q}_i^T$，其代數與幾何意義為何？

    (A) 它代表空間中某個旋轉變換矩陣，與 $\mathbf{q}_i$ 方向相關。
    (B) 它是秩 (rank) 等於 $n-1$ 的方陣，代表法向量為 $\mathbf{q}_i$ 的超平面。
    (C) 它是一個對角矩陣，其對角線元素對應到 $\mathbf{q}_i$ 的各個分量。
    (D) 它是一個秩 (rank) 等於 1 的矩陣，在幾何上代表投影到由單範特徵向量 $\mathbf{q}_i$ 所生成之一維子空間的正交投影矩陣。

(II) 簡答題 (20%, each 10%)(write down the statement (or definition), formula if any, interpretation)

7. 根據「正交分解定理 (Orthogonal Decomposition Theorem)」，對於 $\mathbb{R}^n$ 中的任意子空間 W，空間中的任何一個向量 $\mathbf{v}$ 都可以分解為 $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp$，其中 $\mathbf{w} \in W$ 且 $\mathbf{w}^\perp \in W^\perp$。請說明為什麼這種分解結果必然是「唯一」的？(提示：可假設存在另一組分解 $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_1^\perp$，並利用子空間交集 $W \cap W^\perp$ 的性質來推論)。

8. 對一個矩陣 A 進行 QR 分解 $(A = QR)$ 時，定理嚴格要求矩陣 A 的行向量 (column vectors) 必須是「線性獨立」的。請說明為何需要這個前提條件？若 A 的行向量中存在線性相依，在執行 Gram-Schmidt 正交化演算法的過程中會遭遇什麼數學上的困難，導致無法順利建構出單範正交矩陣 Q 或可逆的上三角矩陣 R？

考試科目： 線性代數 (二) 開課班別： 商學院 命題教授: 吳漢銘

考試日期：4/15(三)09:20-11:00	※准帶項目打「O」，否則打「×」					1. 需加發計算紙或答案紙請在試題內封袋備註。 2. 為環保節能減碳，試題一律採雙面印刷，有特殊印製需求，請註記：A 卷
本試題共3頁，印刷份數: 16 份	計算機	課本	筆記	字典	手機平板筆電	
備註：注意事項要看!! (ch5.1~5.4)	O	×	×	×	×	

(III) 計算題 (40%, 20% each)

9. Find the orthogonal projection of $\mathbf{v}$ onto the subspace W spanned by the vectors $\mathbf{u}_i$. (You may assume that the vectors $\mathbf{u}_i$ are orthogonal.)

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

10. Orthogonally diagonalize the matrix by finding an orthogonal matrix Q and a diagonal matrix D such that $Q^T AQ = D$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(IV) 證明題 (30%)

11. 什麼是「譜定理 (The Spectral Theorem)」，請敘述並証明。