

7-1 習題提示

21. $y = x^3 - 1$ 反解 $x = ? y$

22. 同 21

33. 觀察 x 範圍，先反解得到反函數後即可得反函數之定義域

37. 反函數部分同前，可對反函數微分或利用反函數微分定理

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

38. 同 37

41. 利用反函數微分定理

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

7-2

2. 利用對數的運算性質 $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$ $\log_a b^c = c \log_a b$, $\log_a b -$

$\log_a c = \log_a \frac{b}{c}$ 等等

3. 同 2

8,15,22 直接微分，注意 chain rule, Product Rule, Quotient Rule 即可

35. 使用微積分第二基本定理。

38. 可直接積分或令 $y=3x-2$ 後變數代換

44. 令 $y=\ln x$ 後變數代換

45. 同 44

52. 令 $y = 1 + \sqrt{x}$ 後變數代換

55,62,67 $y=f(x)$ 左右同時取對數後同時微分，注意左邊為 $\frac{1}{y} * y'$

7-3

2,4 兩邊同時取對數使 e 消失後即可求解

9.14.20 直接微分即可，注意 chain rule

24.使用微積分第二基本定理即可

25.左右同微分即可，注意 chain rule .

28.同 25

33.將 $8e^{x+1}$ 視為 $8e(e^x)$ 即可

41.令 $y=1/x$ 變數代換

43.令 $y = \tan \theta$ 做變數代換

49.令 $y = 1 + e^r$

50.同除 e^x 後令 $y = 1 + e^{-x}$

57. $5^{\sqrt{s}} = e^{\ln 5^{\sqrt{s}}}$ 微分

72.使用對數換底公式 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ 後微分

81.同 72

85.利用 $\frac{d}{dx} a^x = a^x * \ln a$

91.令 $y = x^{2x}$ 變數代換

96.直接積分即可

99.將 $\log_2 x$ 換底後再令 $y = \ln x$ 變數代換即可

106 換底後令 $y = \ln x$ 變數代換即可

111,116 使用 $a=e^{\ln a}$

118.左右同取 \ln 後微分，注意 chain rule

7-5

5,8,14,20,27,29 皆為 $\frac{0}{0}$ 的形式，直接做即可

34. 為 $\frac{\infty}{\infty}$ 直接做

41. 通分後即可

46. 原式可改為 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$

48. 直接使用 L'Hôpital'

53. 令 $f(x) = \ln x^{\frac{1}{x}}$ 後，左右同取 ln

58. 同 53

59. $x^x = e^{x \ln x} = e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$

60. 左右同取 ln

62. 左右同取 ln

73. 直接做即可

7-6 習題提示

$$22. \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1}x$$

33.41.42 直接微分，注意 chain rule

$$44. \text{整理成 } \frac{1}{2} \int \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} \text{ 令 } u=2x$$

$$46. \text{整理成 } \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{3^2+x^2}}$$

$$47. \text{令 } u = 5x$$

$$63. \text{令 } u = e^x$$

68. 將 $2x - x^2$ 配方

72. 將 $y^2 + 6y + 10$ 配方

79. 將 $x^2 + 2x$ 配方後 令 $y = x + 1$

$$83. \text{令 } u = \sin^{-1}x$$

$$86. \text{令 } u = \sin^{-1}y$$

習題解答:

7-1

$$21. f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

$$22. f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x}$$

$$33. f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x+1} \text{ domain:} [-1, \infty) \text{ range:} (-\infty, 1]$$

$$37. -4, -\frac{1}{4}$$

$$38. 20, \frac{1}{20}$$

$$41. \frac{1}{9}$$

7-2

$$2. (a) \ln 3 - \ln 2 \quad (b) 2 \ln 2 - \ln 3 \quad (c) -\ln 2 \quad (d) 2 \ln 5 + 2 \ln 7 \quad (e) \ln 7 - 3 \ln 5 \quad (f) \frac{1}{2}$$

$$3. (a) \ln 5 \quad (b) \ln(x-3) \quad (c) \ln(t^2)$$

$$8. \frac{3}{2t}$$

$$15. (\ln t)^2 + 2 \ln t$$

$$22. 1 - \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$$

$$35. 2x \ln|x| - x \ln \frac{|x|}{\sqrt{2}}$$

$$38. \ln \frac{2}{5}$$

$$44. \ln 2$$

$$45. \frac{1}{\ln 4}$$

$$52. \ln 2$$

$$53. \ln(1 + \sqrt{x}) + C$$

$$55. \frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}$$

$$62. -\frac{3t^2+6t+2}{(t^3+3t^2+2t)^2}$$

$$67. y' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{2x+3} \right)$$

7-3

2.(a) $t = -100 \ln 1000$ (b) $t = -\frac{\ln 10}{k}$ (c) $t = -1$

4. $t = x^2 + 2x + 1$

9. $x e^x$

14. $\frac{1}{\theta} - 1$

20. $\frac{1}{2\theta(1+\theta^2)}$

24. $4x e^{2x} - 8e^{\sqrt[4]{x}}$

25. $\frac{y e^y \cos x}{1 - y e^y \sin x}$

28. $\frac{(x e^x + 1) \cos^2 y}{x}$

33. $8e^{(x+1)} + C$

41. $-e^{\frac{1}{x}} + C$

43. e

49. $\ln(1 + e^r) + C$

50. $-\ln(e^{-x} + 1) + C$

57. $\left(\frac{\ln 5}{2\sqrt{s}}\right) 5^{\sqrt{s}}$

72. $\frac{2 \ln r}{r(\ln 3)(\ln 9)}$

81. $\frac{1}{t}$

85. $\frac{1}{2 \ln 2}$

91. 32760

96. $\frac{1}{\ln 2}$

99. $2 (\ln 2)^2$

106. $-\frac{(\ln 8)^2}{\ln x} + C$

107. $\ln(\ln x) \quad x > 1$

111. $(x + 1)^x \left[\frac{x}{x+1} + \ln(x + 1) \right]$

116. $x^{\sin x} \left[\frac{\sin x + x(\ln x)(\cos x)}{x} \right]$ 118. $\left(\frac{\ln(\ln x) + 1}{x} \right) (\ln x)^{\ln x}$

7-5

5. $\frac{1}{2}$

8.-10

14. $\frac{5}{2}$

20. $\frac{1}{1+\pi}$

27. $\ln 3$

29. $\frac{1}{\ln 2}$

34.1

41.- $\frac{1}{2}$

46.0

48.1

53.1

58. e^2

59.1

60.1

62.1

73. ∞

7-6

9. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

12. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

22. $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

33. $\frac{1}{(\tan^{-1} x)(1+x^2)}$

41. $\sin^{-1} x$

42. $-\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

44. $\frac{1}{2} \sin^{-1}(2x) + C$

46. $\frac{\sqrt{3}}{9} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$

47. $\frac{1}{\sqrt{2}} \sec^{-1} \left| \frac{5x}{\sqrt{2}} \right| + C$

63. $\frac{\pi}{12}$

68. $\sin^{-1}(x-1) + C$

72. $\tan^{-1}(y+3) + C$

79. $\sec^{-1}|x+1| + C$

83. $\frac{(\sin^{-1} x)^3}{3} + C$

86. $\ln|\sin^{-1} y| + C$